¿A qué llamamos historia de la Aritmética? Una respuesta a través de cinco trazas

*Adriana María Gálvez**

*Andrés Felipe Maldonado***

*Edgar Alberto Guacaneme****

RESUMEN

En este documento se responde la pregunta que hace parte del título desde cinco trazas diferentes pero interrelacionadas, a saber: la historia del número, la historia de los sistemas de numeración, la historia de los sistemas numéricos, la historia de la teoría de números y la historia de la logística. Esta respuesta analítica, constituye parte del marco de referencia usado para caracterizar el papel de la historia de la aritmética en la formación inicial de profesores de matemáticas.

Palabras clave: Conjuntos numéricos, operaciones aritméticas, relaciones numéricas, sistemas de numeración, historia de la aritmética.

* Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: adrianam.galvez@gmail.com

** Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: andresmaldonado2703@gmail.com

*** Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: guacaneme@pedagogica.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En un intento de caracterizar el papel que cumple la historia de la aritmética en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, hemos estado desarrollando un trabajo de grado[1] que asume como contexto de estudio el espacio académico *Enseñanza y aprendizaje de la aritmética y el álgebra,* de la Licenciatura en Matemáticas de la misma universidad. En este orden de ideas hemos requerido precisar aquello que constituye y define la historia de la aritmética, asunto por demás problemático dado que, por un lado, no es tan sencillo establecer qué es aritmética y, por otro lado, en su historia parecen entremezclarse las historias del concepto de número, de los numerales, de los conjuntos numéricos, de las propiedades de los números, de las operaciones y algoritmos aritméticos. Para contar con un marco de referencia para el trabajo de grado, y sin ninguna pretensión de escribir una nueva historia de la aritmética, desde un enfoque analítico, hemos configurado cinco trazas de la historia de la aritmética a través de las cuales observar sistemáticamente el lugar de esta en el curso de formación citado.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La historia del número, la historia de los sistemas de numeración, la historia de los sistemas numéricos, la historia de la teoría de números y la historia de la logística, constituyen las cinco trazas que hemos identificado y establecido para la historia de la aritmética. Si bien sabemos que estas no están desligadas y que se definen recíprocamente, en la medida de lo posible hemos decidido tratarlas de manera independiente, pues buscamos que ellas configuren un marco analítico específico para la indagación. Por otra parte, reconocemos que estas pueden no suministrar una visión exhaustiva de la historia de la aritmética, pues aspectos lúdicos de ella (*verbigracia*, el trabajo de Euler sobre los cuadrados mágicos y los puzles), y quizá otros aspectos que desconocemos, pueden no necesariamente estar incluidos en tales trazas. A continuación esbozamos algunos rasgos descriptivos de las cinco trazas.

Historia de los sistemas de numeración. Esta traza la abordamos teniendo en cuenta tres aspectos que son: los símbolos que se han usado históricamente para representar los números, las bases numéricas y el tipo de sistema (aditivo, posicional, etc.), todo ello desde las culturas de los babilonios, egipcios, romanos, griegos, chinos, árabes e hindúes. Los babilonios usaban

[1] Titulado "El papel de la historia de la aritmética en un curso de didáctica para la formación de profesores de matemáticas" desarrollado en el marco de la línea de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional.

la escritura cuneiforme, utilizaban la base 60 y en su sistema se repetían los símbolos, hasta que tiempo después lograron tener un sistema posicional. En los egipcios se reconocen dos tipos de numerales (los jeroglíficos y los numerales de la notación hierática, que es la que aparece en los papiros), se usa la base 10 y se tenían símbolos para cada cifra. El conocido sistema de numeración romano que en general utiliza letras mayúsculas es un sistema base 10 aditivo. Los chinos tenían varios sistemas, uno de ellos era un sistema multiplicativo y otro fue el sistema a base de varillas que era un sistema en base 10. Los árabes, por su parte, asimilaban con gran rapidez la cultura de los pueblos que conquistaban, por lo cual utilizaron diferentes sistemas de numeración; uno de ellos, el que actualmente se conoce como sistema de numeración arábigo, proviene de la India. El sistema hindú, que inicialmente era un sistema reiterativo y luego pasó a ser posicional, era un sistema base 10. Para pasar al sistema que usamos actualmente fue necesario reconocer dos cosas: la primera es que con solo nueve dígitos y el sistema posicional se podía representar cualquier número; lo segundo fue la introducción de un símbolo para una posición que falta, el cero (Boyer, 2001). Es evidente que en todas las culturas el símbolo para el cero apareció tarde en comparación con los demás símbolos para los números (D'Amore & Fandiño, 2012).

Historia de los sistemas numéricos. Esta historia la abordamos teniendo en cuenta los momentos en los que se intentan configurar o definir los conjuntos numéricos, es decir, construir los conjuntos de manera rigurosa, con sus propiedades y con su estructura en general. Hemos encontrado que históricamente se hizo un trabajo con los naturales, con los racionales, los reales y luego sí se trabajó en torno a los negativos (D›Amore & Fandiño, 2012). La historia de esta traza no se remonta a tiempos tan lejanos como la historia de los sistemas de numeración; sus inicios se refieren a los trabajos de los matemáticos, que desde diferentes perspectivas y con diferentes intenciones procuran la construcción de los conjuntos numéricos, por ejemplo, Dedekind desde el estructuralismo, Frege y Russell desde el logicismo; Peano en el siglo XIX desde la teoría de conjuntos buscaba darle rigor al conjunto de los naturales, darle una estructura y ponerlos en un ámbito diferente, es decir, ponerlos en el marco de una teoría, en este caso teoría de conjuntos. Con respecto a las intenciones, se puede señalar que Dedekind hace la construcción del conjunto de los números reales para darle rigor al Cálculo, y trabajar las funciones sobre conjuntos bien definidos (Devlin, 1998). Russell buscaba reformular las matemáticas desde la perspectiva de la lógica, y para ello comenzó reescribiendo la aritmética y procurando darle un soporte fuerte a lo que son los conjuntos numéricos. Algo similar intentó de manera fallida hacer Frege, como se lo hizo notar el mismo Russell. Hilbert propuso una formalización para los números reales, es decir, sin recurrir a la intuición de número (Pareja, 2008).

Historia del número. Esta traza se aborda fundamentalmente en atención al significado de número; este ha cambiado dependiendo del momento histórico y la corriente filosófica. Desde la época de Pitágoras (580 a. C.), ya se consideraban los números como entes abstractos que tenían una existencia al margen de los objetos que los representan; para los pitagóricos el número era el principio y explicación de todo el universo, tanto así que uno de los discípulos llamado Filolao llegó a afirmar que todas las cosas conocidas contienen número, pues no es posible que sin número nada pueda ser conocido ni concebido. Por otra parte, en la época dorada griega, la concepción de número toma otro significado, porque son expresión de pluralidad y de lo discreto; en consecuencia, no consideraban el uno como número (Arbeláez, Anacona, & Recalde, 1998). En los siglos XVII y XVIII, el intento por dar estructura a los números en un conjunto numérico les da un significado distinto al presentando en otras épocas. A principios del siglo XX, hay una posición extrema, en el intento *formalista* de hacer una teoría, en que el objeto matemático número no tenga significado alguno.

Historia de la teoría de números. En la historia de la teoría de números se tiene en cuenta la historia del estudio de las propiedades de los números. En este sentido reconocemos a los pitagóricos quienes hicieron estudios de los números según sus propiedades, clasificándolos en números amigos, perfectos, abundantes, deficientes; además los pitagóricos iniciaron el camino para el estudio de los números figurados. Por otra parte, Euclides también se interesó por los números perfectos e hizo consideraciones sobre los números pares e impares, la divisibilidad, los números primos y, en general, presentó una teoría de números en los libros VII, VIII y IX de *Elementos*. A partir de estos se inicia un recorrido hacia el Teorema Fundamental de la Aritmética demostrado por Gauss, que incorpora el trabajo de matemáticos como Al-Farisi, Prestet, Euler y Legendre (Agargün & Özkan, 2001). La historia de la teoría de números da cuenta de diferentes aspectos en relación con los números primos, por ejemplo, los intentos de Fermat y Euler, para encontrar una expresión general para los números primos. Igualmente, se han enunciado e incluso se han establecido conjeturas relacionadas con los números primos como la conjetura de Goldbach, conjetura que aún sigue sin ser demostrada y que relaciona la escritura de los números pares con los números primos. Euclides, Kummer y Euler, en diferentes contextos sociales y culturales, demuestran que los números primos son infinitos (Bagni, 2008).

Historia de logística. En esta traza vamos a considerar los instrumentos y estrategias para hacer cálculo de operaciones. Si bien mucho antes que los pitagóricos se reconoce la existencia de culturas que desarrollaron estrategias o técnicas para hacer cálculo numérico, es en estos donde se reconoce o donde se advierte una distinción entre lo que consideraban *aritmética,* que se refería a las relaciones abstractas existentes entre los números, y lo que consideraba *logística*, que se ocupaba del cálculo práctico con números y su aplicación en el comercio (Newman, 1980). En la época dorada griega no se hicieron muchas contribuciones a la logística, dado que los matemáticos se interesaron más en la teoría que en los aspectos prácticos. En otras culturas se han interesado en desarrollar diferentes estrategias de hacer operaciones, algunas de esas estrategias son manipulativas y otras incluyen instrumentos que se usaron para hacer cuentas, como por ejemplo el ábaco. En Roma, se empleaba una tabla de contar o ábaco; los chinos y japoneses también utilizaron ábacos. Hace 400 años en Europa se hacían la adición y sustracción en tablas de contar; los números eran representados por cuentas que se quitaban a medida que el problema lo requería. Hacia finales del siglo XVI, Napier desarrolló un método para multiplicar (los huesos de Napier), preocupado porque los cálculos numéricos largos frenaban el progreso científico (Collette, 2006). En el Renacimiento, aparecen los nomogramas como instrumentos para realizar cálculos. Y en el siglo XX fue muy usual el trabajo con las reglas de cálculo. Los indígenas americanos también desarrollaron estrategias o métodos para hacer cuentas. Los nativos del Perú usaron los llamados quipus que consistían en cuerdas anudadas para llevar sus cuentas. Los mayas multiplicaban usando trazos para representar los números; ellos trazaban líneas horizontales para un número y líneas verticales para el otro, el resultado se encontraba teniendo en cuenta el número de intersecciones entre las líneas (Boyer, 2001).

CONCLUSIONES

Las cinco trazas anteriores configuran un marco de referencia, desde el cual analizar el papel de la historia de la aritmética en un curso de Didáctica; en otras palabras, esta forma de aproximarnos a la historia de la aritmética nos sirve para abordar lo que sucedió en las clases del curso de Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra (con relación a la historia de la aritmética) con un poco más de precisión y dando un carácter más analítico a lo que allí aconteció. En un segmento del curso, se hizo referencia a Peano y su construcción de los números naturales, lo cual desde la anterior perspectiva se ubica como parte de la historia de los sistemas numéricos y no de la historia del número.

Por otro lado, estas trazas ofrecen una perspectiva analítica, que contribuye a la cualificación de la conciencia sobre los aspectos curriculares de la matemática escolar. En este sentido, permite a los profesores de matemáticas de la Educación Básica y Media identificar en qué momento trabajan la teoría de números, en qué grados se hace un trabajo sobre la logística y cuándo se dota de nuevos significados la idea de número, entre otros. Asimismo, permite evidenciar diferencias en el trabajo matemático como, por ejemplo, que es distinto trabajar propiedades de los números cuadrados a encontrar el cuadrado de un número.

Por último, queremos mencionar que la aproximación a la historia de la aritmética a través de estas trazas constituye un ejercicio inicial abierto a la crítica y a las modificaciones que el devenir del trabajo vaya generando. En esta dirección, el contenido de este documento más allá de un resultado se debe reconocer como un momento de un proceso de reflexión en nuestra formación docente e investigativa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agargün, A., & Özkan, E. (2001). A Historical Survey of the fundamental Theorem of Arithmetic. *Historia Mathematica, 28*, 207-214.

Arbeláez, G., Anacona, M., & Recalde, L. (1998). *Número y magnitud: una perspectiva histórica*. Cali: Artes gráficas Univalle.

Bagni, G. (2008). A Theorem and Its Different Proofs: History, Mathematics Education, and the Semiotic-Cultural Perspective. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 8*(3), 217-232.

Boyer, C. (2001). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.

Collette, J. (2006). *Historia de las Matemáticas*. México: Siglo XXI.

D›Amore, B., & Fandiño, M. (2012). *El número cero. Aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, conceptuales y didácticos del número más misterioso.* Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Devlin, K. (1998). *The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible.* Holt Paperbacks.

Newman, J. (1980). *Sigma: El mundo de las Matemáticas.* Barcelona: Grijalbo.

Pareja, D. (2008). *El lenguaje y las Matemáticas*. Quindio: Universidad del Quindio.